

# SOLUȚII DISCONTINUE PENTRU CALCULUL PLĂCILOR ÎN TEORIA CLASICĂ

Doctorand **Sergiu GALBINEAN**  
Universitatea Tehnică a Moldovei

## DISCONTINUOUS SOLUTIONS FOR PLATE ANALYSIS IN CLASSICAL THEORY

**Summary.** In this paper a new numerical method in the mechanics of deformable solid body is proposed – indirect boundary element method (BEM) based on discontinuous solutions. These discontinuous solutions, obtained by prof. Gh. Moraru, have been applied for analysis of plates with arbitrary shapes, different bearing modes and types of loads. For the proposed method, the numerical implementation was performed and a computational program was developed in the Matlab programming language. Using this program, were calculated the displacements and the internal efforts in plates with different bearing modes and cases of loading. The obtained results were compared with the finite element method (FEM) and an analytical method (Fourier trigonometric series).

**Keywords:** plate, boundary element method, discontinuous solutions, integral equations, Green functions.

**Rezumat.** În această lucrare se propune spre cercetare o nouă metodă numerică în mecanica corpului solid deformabil – metoda elementelor de frontieră (MEFr) indirectă bazată pe soluții discontinue. Aceste soluții discontinue, obținute de către prof. Gheorghe Moraru, au fost aplicate la calculul plăcilor de contur arbitrar, cu diferite moduri de rezemare și diferite tipuri de încărcări. Pentru metoda propusă a fost efectuată implementarea numerică și a fost elaborat un program de calcul în limbajul de programare Matlab. Cu ajutorul acestui program au fost calculate deplasările și eforturile interioare în plăci cu diferite moduri de rezemare și diferite cazuri de solicitare. Rezultatele obținute au fost comparate cu metoda elementelor finite (MEF) și cu o metodă analitică (serii trigonometrice Fourier).

**Cuvinte-cheie:** placă, metoda elementelor de frontieră, soluții discontinue, ecuații integrale, funcții Green.

## INTRODUCERE

La momentul actual, una dintre cele mai utilizate metode numerice de calcul în diferite domenii de cercetare (mecanica corpului solid deformabil, mecanica fluidelor, termoelasticitate etc.) este metoda elementelor finite (MEF). Această metodă are un șir de avantaje în comparație cu alte metode numerice, cum ar fi: caracterul său general, spectrul larg de utilizare, simplitate în programare, eficacitate la calculul nelinear etc. În ciuda răspândirii largi în tehnică, MEF se confruntă totuși și cu un șir de deficiențe, printre acestea numărându-se sistemele masive de ecuații liniare, volumul mare de informație inițială, utilizarea masivă a memoriei operative și a spațiului de stocare al calculatorului, ineficiența la rezolvarea problemelor cu concentrări de tensiuni și domenii infinite etc.

În ultimele decenii a început să se dezvolte intens metoda elementelor de frontieră (MEFr). Cele mai importante avantaje ale metodei respective sunt: reducerea numărului de necunoscute cu o unitate, informație inițială minimă, precizie înaltă, eficiența în probleme cu concentrări de tensiuni, probleme de contact și domenii infinite etc.

În MEFr ecuațiile integrale pot fi obținute pe două căi: directă și indirectă. La baza metodei directe se află teorema reciprocității lucrului mecanic (teorema

Maxwell-Betti) [1, pp. 83-95] și soluțiile fundamentale reprezentate de funcțiile de influență Green [2] pentru un domeniu infinit. Cel mai mare dezavantaj al metodei directe constă în faptul că nu pot fi satisfăcute toate condițiile de frontieră posibile. În cadrul metodei indirecte, în prima etapă se rezolvă singularitățile, astfel încât să fie satisfăcute condițiile pe frontieră, iar în a doua etapă se calculează valorile necunoscutele pe frontieră în funcție de soluțiile singulare.

În această lucrare se propune o variantă nouă a metodei indirecte elaborate în baza soluțiilor discontinue. Aceste soluții discontinue au fost obținute de către prof. Gh. Moraru cu ajutorul transformării generalizate Fourier [3] și sunt descrise în monografiile [4, 5].

Metoda propusă oferă posibilitatea de a formula ecuațiile integrale pentru plăcile cu diferite moduri de rezemare și cu diferite defecte, ea este eficientă la rezolvarea problemelor ce prezintă singularități.

## SOLUȚIILE DISCONTINUE PENTRU PLACA INFINITĂ PROVENITE DIN SALTURI CONCENTRATE

Se va considera o placă infinită având pe axa  $y$  ( $x=0$ ) un defect (fisură, articulație plastică, gaură etc.) (figura 1).

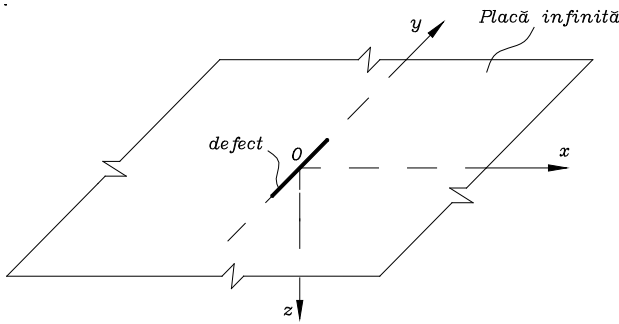


Figura 1. Placă infinită cu defect.

Traversând de la o parte a defectului la cealaltă, funcțiile pot avea salturi: săgeata  $w$ , unghiul de rotație  $\theta_x$ , momentul de încovoiere  $M_x$ , forța tăietoare generalizată  $V_x$ . Aceste salturi se vor nota:  $\langle w(y) \rangle$ ,  $\langle \theta_x(y) \rangle$ ,  $\langle M_x(y) \rangle$ ,  $\langle V_x(y) \rangle$ .

Relațiile dintre deplasări și salturi pot fi scrise în formă matricială

$$\begin{Bmatrix} w(x, y) \\ \theta_x(x, y) \\ \theta_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle w(y) \rangle \\ \langle \theta_x(y) \rangle \\ \langle M_x(y) \rangle \\ \langle V_x(y) \rangle \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

Relațiile dintre eforturi și salturi:

$$\begin{Bmatrix} M_x(x, y) \\ M_y(x, y) \\ M_{xy}(x, y) \\ Q_x(x, y) \\ Q_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle w(y) \rangle \\ \langle \theta_x(y) \rangle \\ \langle M_x(y) \rangle \\ \langle V_x(y) \rangle \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

Relațiile dintre forțele transversale generalizate și salturi:

$$\begin{Bmatrix} V_x(x, y) \\ V_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & l_{15} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} & l_{25} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle w(y) \rangle \\ \langle \theta_x(y) \rangle \\ \langle M_x(y) \rangle \\ \langle V_x(y) \rangle \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Elementele  $g_{ij}, t_{ij}, l_{ij}$  au forma

$$g_{11} = -\frac{x}{4\pi r^4} [(3-\nu)x^2 + (1+\nu)y^2];$$

$$t_{11} = \frac{3(1-\nu)^2 D}{2\pi} \frac{x}{r^8} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4);$$

$$l_{11} = \frac{3(1-\nu)D}{2\pi r^{10}} [(7-3\nu)x^6 - 5(11-7\nu)x^4y^2 + 5(1-5\nu)x^2y^4 + (3+\nu)y^6];$$

unde:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  reprezintă distanța de la punct până la saltul concentrat;

$\nu$  - coeficientul lui Poisson;  $h$  - grosimea plăcii;

$E$  - modulul de elasticitate;

$D = Eh^3/12(1-\nu)$  - rigiditatea cilindrică a plăcii.

### EFORTURI ÎN PLACA DE CONTUR ARBITRAR

Folosind soluțiile de la salturile concentrate ca funcții Green, prin superpoziție pot fi scrise soluțiile discontinue pentru defectul amplasat pe conturul  $L$  (figura 2). Trecând de la sistemul local de coordonate  $(\bar{x}, \bar{y})$  la sistemul local  $(n, t)$  amplasat în orice punct  $P$ , se obține:

$$w^*(P) = \int_L \bar{w}(P, Q) ds_Q;$$

$$\theta_n^*(P) = \int_L [\bar{\theta}_x(P, Q) \cos \gamma + \bar{\theta}_y(P, Q) \sin \gamma] ds_Q;$$

$$M_n^*(P) = \int_L [\bar{M}_x(P, Q) \cos^2 \gamma + \bar{M}_y(P, Q) \sin^2 \gamma + 2\bar{M}_{xy}(P, Q) \cos \gamma \sin \gamma] ds_Q;$$

$$M_{nt}^*(P) = \int_L \{ [\bar{M}_y(P, Q) - \bar{M}_x(P, Q)] \cos \gamma \sin \gamma + \bar{M}_{xy}(P, Q) (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \} ds_Q;$$

$$Q_n^*(P) = \int_L [\bar{Q}_x(P, Q) \cos \gamma + \bar{Q}_y(P, Q) \sin \gamma] ds_Q;$$

$$V_n^*(P) = Q_n^* + \frac{\partial M_{nt}^*}{\partial t};$$

unde  $\gamma = \beta - \alpha$ .

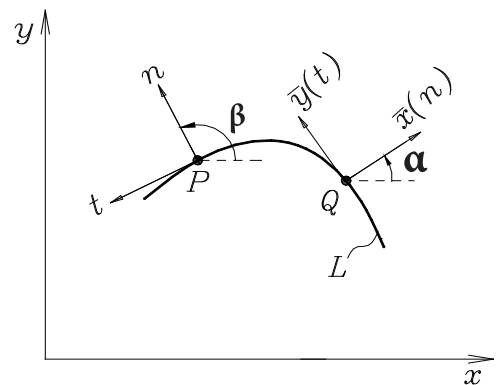


Figura 2. Sisteme de coordonate locale amplasate pe defectul L.

Bara de sus arată că funcțiile respective sunt prezentate în coordonate locale  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Funcțiile  $\bar{g}_{ij}$ ,  $\bar{t}_{ij}$ ,  $\bar{l}_i$  pot fi obținute din relațiile (4) substituind  $x_i$  cu  $\bar{x}_i$  și  $y_i$  cu  $\bar{y}_i$ .

Pentru a obține ecuațiile integrale, starea de deformare a plăcii este prezentată ca suma a două stări. Prima (notată cu cerculeț) provine de la sarcina exterioară. A doua (notată cu asterisc) provine din salturile concentrate pe linia  $L$  a defectului (6).

$$\begin{aligned} w(P) &= w^o(P) + w^*(P); \\ M_n(P) &= M_n^o(P) + M_n^*(P); \\ \theta_n(P) &= \theta_n^o(P) + \theta_n^*(P); \\ V_n(P) &= V_n^o(P) + V_n^*(P). \end{aligned} \quad (6)$$

### IMPLEMENTAREA NUMERICĂ

Se va studia o placă de contur arbitrar având diferite condiții de frontieră (figura 3). Pe lungimea conturului  $L_1$  placa va fi considerată simplu rezemată, pe  $L_2$  – încadrată și pe  $L_3$  – liberă.

Frontiera plăcii va fi considerată ca defect într-o placă infinită. Traversând din interiorul regiunii ocupate de placă spre frontiera defectului, funcțiile  $w$ ,  $\theta_n$ ,  $M_n$ ,  $V_n$  pot avea salturi. Traversând din exteriorul regiunii ocupate de placă spre frontiera defectului aceste salturi vor fi considerate nule.

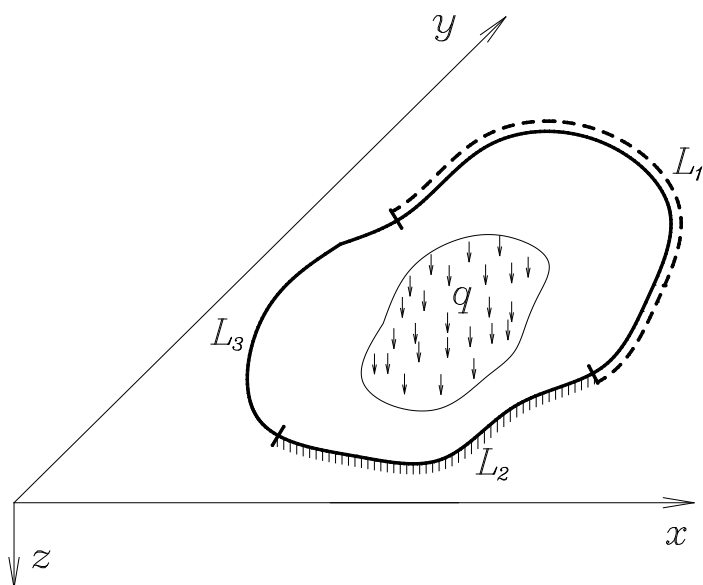


Figura 3. Placă de contur arbitrar având diferite moduri de rezemare.

Folosind condițiile de frontieră se va obține:

- pentru conturul simplu rezemat ( $L_1$ )  
 $w^* + w^o = 0; \quad M_n^* + M_n^o = 0,$
- pentru conturul încadrat ( $L_2$ )  
 $w^* + w^o = 0; \quad \theta_n^* + \theta_n^o = 0,$

- pentru conturul liber ( $L_3$ )  
 $M_n^* + M_n^o = 0; \quad V_n^* + V_n^o = 0.$

Soluțiile  $w^*$ ,  $\theta_n^*$ ,  $M_n^*$  și  $V_n^*$  provenite din salturi sunt date de relațiile (5).

Soluțiile  $w^o$ ,  $\theta_n^o$ ,  $M_n^o$  și  $V_n^o$  depind de tipul sarcinii exterioare. De exemplu, dacă placa este acționată de o forță concentrată  $F$  aplicată în punctul cu coordonatele  $a_0, b_0$  față de originea sistemului global, atunci soluția în nodul  $i$  situat pe frontiera  $L$  va fi:

$$\begin{aligned} w_i^o &= F \cdot g_{14}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0); \\ \theta_{ni}^o &= F \left[ n_x g_{24}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) + n_y g_{34}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) \right] \\ M_{ni}^o &= F \left[ n_x^2 t_{14}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) + n_y^2 t_{24}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) + \right. \\ &\quad \left. + 2n_x n_y t_{34}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) \right]; \\ V_{ni}^o &= F \left[ n_x l_{14}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) + n_y l_{24}(x_i^m - a_0, y_i^m - b_0) \right]; \end{aligned} \quad (7)$$

unde  $x_i^m, y_i^m$  sunt coordonatele nodului elementului de frontieră  $i$  în sistemul global, iar  $n_x = \cos \alpha$  și  $n_y = \sin \alpha$ .

Discretizând conturul  $L$  ( $L=L_1+L_2+L_3$ ) într-un set de elemente constante, se va obține următorul sistem de ecuații liniare

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{j=n_{L3}} w_{ij}^1 \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} w_{ij}^2 \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} w_{ij}^3 \langle M_{nj} \rangle + \\ &+ \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} w_{ij}^4 \langle V_{nj} \rangle = -w_i^o; \quad (i = n_{L1}, n_{L2}) \\ &\sum_{j=n_{L3}} \theta_{ij}^1 \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} \theta_{ij}^2 \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} \theta_{ij}^3 \langle M_{nj} \rangle + \\ &+ \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} \theta_{ij}^4 \langle V_{nj} \rangle = -\theta_{ni}^o; \quad (i = n_{L2}) \\ &\sum_{j=n_{L3}} m_{ij}^1 \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} m_{ij}^2 \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} m_{ij}^3 \langle M_{nj} \rangle + \\ &+ \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} m_{ij}^4 \langle V_{nj} \rangle = -M_{ni}^o; \quad (i = n_{L1}, n_{L3}) \\ &\sum_{j=n_{L3}} v_{ij}^1 \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} v_{ij}^2 \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} v_{ij}^3 \langle M_{nj} \rangle + \\ &+ \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} v_{ij}^4 \langle V_{nj} \rangle = -V_{ni}^o; \quad (i = n_{L3}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

unde  $n_{L1}, n_{L2}, n_{L3}$  – reprezintă numărul de ordine al elementelor de pe conturul  $L_1, L_2$  și respectiv  $L_3$ .

Termenii  $w_{ij}^1, w_{ij}^2, \dots, v_{ij}^4$  se vor calcula utilizând soluțiile din (4), substituind în acestea  $x$  cu  $\bar{x}_i^m$  și  $y$  cu  $\bar{y}_i^m - \bar{\eta}$ , în care  $\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m$  sunt coordonatele locale ale elementelor;  $-l_j/2 \leq \bar{\eta} \leq l_j/2$ .

$$w_{ij}^1 = \int_{l_j} \bar{g}_{11} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) d\bar{\eta};$$

⋮

$$v_{ij}^4 = \int_{l_j} [\bar{l}_{14} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) \cos \gamma + \bar{l}_{24} (\bar{x}_i^m, \bar{y}_i^m - \bar{\eta}) \sin \gamma] d\bar{\eta};$$

În formă matricială ecuațiile (8) vor avea forma

$$\begin{bmatrix} [w_{ij}^1] & [w_{ij}^2] & [w_{ij}^3] & [w_{ij}^4] \\ [\theta_{ij}^1] & [\theta_{ij}^2] & [\theta_{ij}^3] & [\theta_{ij}^4] \\ [m_{ij}^1] & [m_{ij}^2] & [m_{ij}^3] & [m_{ij}^4] \\ [v_{ij}^1] & [v_{ij}^2] & [v_{ij}^3] & [v_{ij}^4] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \langle \{w_j\} \rangle \\ \langle \{\theta_{nj}\} \rangle \\ \langle \{M_{nj}\} \rangle \\ \langle \{V_{nj}\} \rangle \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{-w_i^o\} \\ \{-\theta_{ni}^o\} \\ \{-M_{ni}^o\} \\ \{-V_{ni}^o\} \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

sau în formă compactă:

$$[A]_{2n_e \times 2n_e} \cdot \{X\}_{2n_e} = \{B\}_{2n_e}. \quad (10)$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații (10) se vor face cunoscute toate salturile de pe frontieră, astfel pot fi calculate deplasările și eforturile în orice punct din interiorul plăcii, acestea fiind exprimate prin salturile obținute.

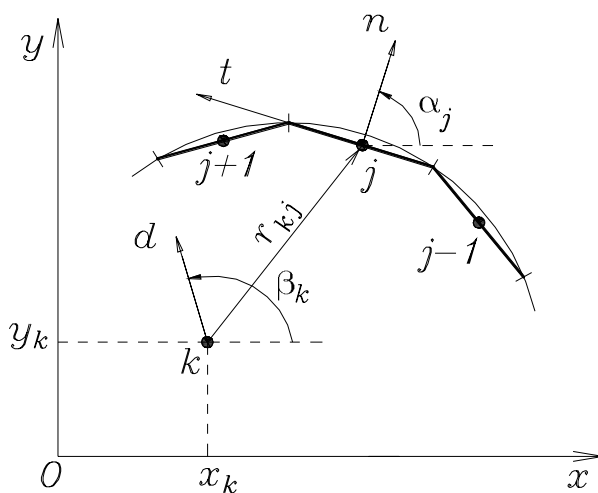


Figura 4. Poziția punctului interior în raport cu elementele de frontieră constante.

De exemplu, dacă este necesar de calculat săgeata într-un punct  $k$  din interiorul plăcii (figura 4), expresia va căpăta forma

$$w_k = \sum_{j=n_{L3}} g_{11} \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} g_{12} \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} g_{13} \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} g_{14} \langle V_{nj} \rangle + w_k^o. \quad (11)$$

Unghiul de rotire a secțiunii în punctul  $k$  ce acționează pe direcția  $d$

$$\theta_k^d = \sum_{j=n_{L3}} (c g_{21} + s g_{31}) \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} (c g_{22} + s g_{32}) \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} (c g_{23} + s g_{33}) \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} (c g_{24} + s g_{34}) \langle V_{nj} \rangle + n_x \theta_{xk}^o + n_y \theta_{yk}^o. \quad (12)$$

Momentul în punctul  $k$  ce acționează pe direcția  $d$

$$M_k^d = \sum_{j=n_{L3}} (c^2 t_{11} + s^2 t_{21} + 2 c s t_{31}) \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} (c^2 t_{12} + s^2 t_{22} + 2 c s t_{32}) \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} (c^2 t_{13} + s^2 t_{23} + 2 c s t_{33}) \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} (c^2 t_{14} + s^2 t_{24} + 2 c s t_{34}) \langle V_{nj} \rangle + n_x^2 M_{xk}^o + n_y^2 M_{yk}^o + 2 n_x n_y M_{xyk}^o. \quad (13)$$

Forța transversală în punctul  $k$  ce acționează pe direcția  $d$

$$Q_k^d = \sum_{j=n_{L3}} (c t_{41} + s t_{51}) \langle w_j \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L3}} (c t_{42} + s t_{52}) \langle \theta_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L2}} (c t_{43} + s t_{53}) \langle M_{nj} \rangle + \sum_{j=n_{L1}, n_{L2}} (c t_{44} + s t_{54}) \langle V_{nj} \rangle + n_x Q_{xk}^o + n_y Q_{yk}^o. \quad (14)$$

Termenii  $g_{11}, g_{12}, \dots, t_{54}$  se vor calcula utilizând soluțiile din (4), substituind  $x_i$  cu  $x_k$  și  $y_i$  cu  $y_k$ ;

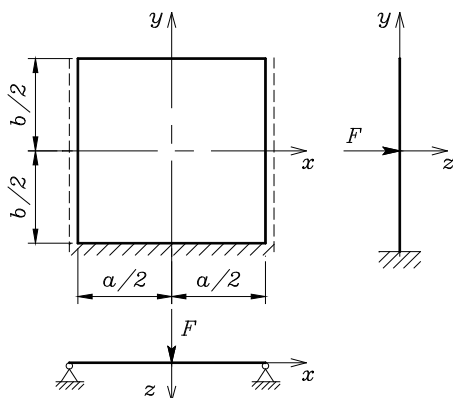
$x_k$  și  $y_k$  - reprezintă coordonatele punctului  $k$  în sistemul global;

$c = \cos(\beta_k - \alpha_j); \quad s = \sin(\beta_k - \alpha_j); \quad n_x = \cos \beta_k; \quad n_y = \sin \beta_k;$

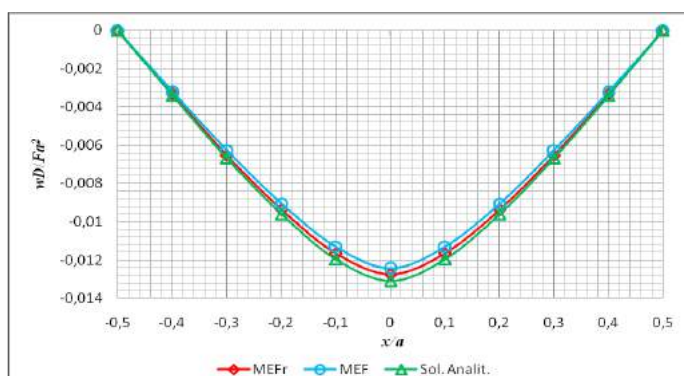
$w_k^o, \theta_{xk}^o, \dots, Q_{yk}^o$  - reprezintă soluțiile în punctul  $k$  provenite din sarcina exterioră, care pot fi determinate folosind relațiile (7), substituind  $x_i^m$  cu  $x_k$  și  $y_i^m$  cu  $y_k$ .

**REZULTATE ȘI ANALIZE**

În baza soluțiilor discontinue a fost elaborat un program de calcul în limbajul de programare Matlab. Ca exemplu de calcul s-a cercetat o placă pătrată cu diferite moduri de rezemare, solicitată la centru de o forță concentrată  $F$  (figura 5). Laturile:  $x = -a/2$  și  $x = a/2$  vor fi considerate simplu rezemate;  $y = -b/2$  – încastrată;  $y = b/2$  – liberă.



**Figura 5.** Placă pătrată având diferite moduri de rezemare a laturilor.



**Figura 7.** Deplasarea verticală  $w$  pe secțiunea centrală  $y = 0$ .

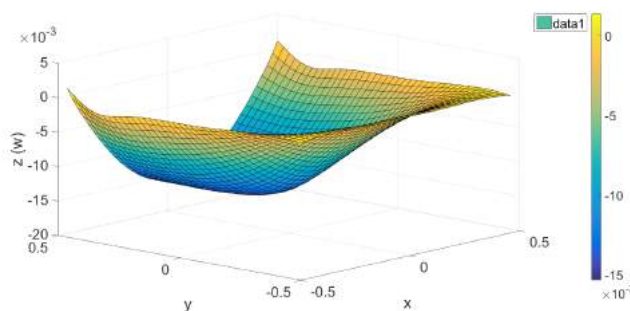
**CONCLUZII**

În lucrare au fost prezentate soluțiile discontinue pentru calculul plăcilor în baza ipotezelor clasice. Aceste soluții au fost implementate numeric și în baza lor a fost elaborat un program de calcul, în limbajul de programare Matlab. Rezultatele obținute cu ajutorul acestui program s-au dovedit a fi în corespundere cu cele analitice și cu cele ale MEF.

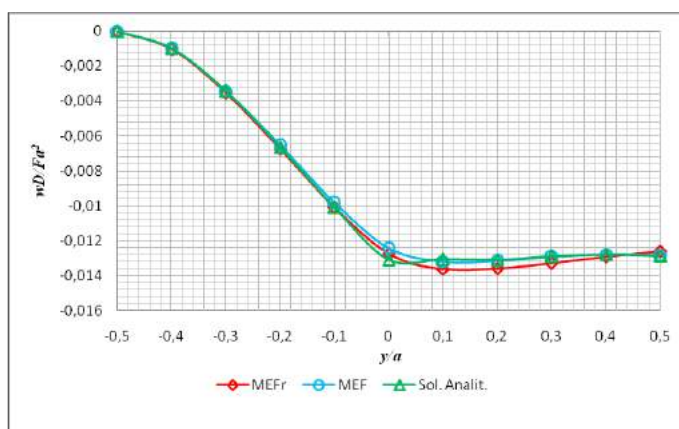
De menționat că în calcul s-au utilizat elemente de frontieră constante și într-un număr cu mult mai redus față de MEF.

MEFr bazată pe soluții discontinue prezintă o direcție nouă de cercetare care deschide noi orizonturi în mecanica corpului solid deformabil. Întrucât metodele elementelor de frontieră sunt considerate relativ noi, până la momentul actual, în baza acestora au fost realizate foarte puține programe de calcul, iar im-

În continuare este prezentat câmpul deplasărilor verticale  $w$  (figura 6) obținut cu ajutorul programului de calcul sus-menționat. Rezultatele obținute prin MEFr bazată pe soluții discontinue au fost comparate cu MEF și cu metoda analitică (serii trigonometrice Fourier) [6], fiind prezentate sub formă de diagrame (figura 7, 8). Din aceste diagrame se observă că rezultatele obținute practic coincid.



**Figura 6.** Câmpul deplasărilor verticale  $w$ .



**Figura 8.** Deplasarea verticală  $w$  pe secțiunea centrală  $x = 0$ .

plementarea numerică a soluțiilor discontinue oferă posibilitatea de a elabora noi softuri pentru calculele ingineresti.

*P.S.:* Autorul dedică acest articol regretatului profesor universitar, doctor habilitat Gheorghe Moraru.

**BIBLIOGRAFIE**

1. Rizzo F. J. An integral equation approach to boundary value problem of classical elastostatics. Q. Appl. Math. 1967.
2. Duffy D. G. Green's Functions with Applications. New York: Chapman & Hall/CRC, 2001, 464 p.
3. Sneddon I. N. Fourier Transforms. New, York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co, 1951, 542 p.
4. Морару Г. А. Метод разрывных решений в механике деформируемых тел. Кишинев: Штиинца, 1990, 127 p.
5. Moraru Gh. Discontinuous solutions in the statics of deformable bodies. Chisinau: Tehnica-Info, 2015, 396 p.
6. Кончковский З. Плиты. Статические расчеты. Москва: Стройиздат, 1984, 480 p.